▪ Théorème

Soients x et x' des nombres réels strictement positifs, soit n un entier relatif.

i)
$$\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$$

ii)
$$\ln\left(\frac{x'}{x}\right) = \ln(x') - \ln(x)$$

iii)
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

iv)
$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

v)
$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

■ Preuve

Soient x et x' des nombres réels strictement positifs, soit n un entier relatif.

i) Montrons

$$\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

Puisque, quels que soient les nombres réels a et b, quel que soit le nombre réel c strictement positif

(1) $a = b \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$

(2) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \, \mathrm{e}^b$

(3) $\mathrm{e}^{\ln(c)} = c$

on obtient

$$\begin{aligned} \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x') &\iff \mathrm{e}^{\ln(xx')} = \mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(x')} \quad (1) \\ &\iff xx' = \mathrm{e}^{\ln(x)} \, \mathrm{e}^{+\ln(x')} \quad (2) \text{ et } (3) \\ &\iff xx' = xx' \quad (3) \end{aligned}$$

ii) Montrons

$$\ln\left(\frac{x'}{x}\right) = \ln(x') - \ln(x).$$

Sachant que $x\frac{x'}{x} = x'$, on a

$$\ln\left(x\frac{x'}{x}\right) = \ln(x')$$

ce qui, compte tenu de i), conduit à

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{x'}{x}\right) = \ln(x')$$

puis

$$\ln\left(\frac{x'}{x}\right) = \ln(x') - \ln(x).$$

iii) Montrons

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

En appliquant ii) avec $x' = 1$, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = 0 - \ln(x) = -\ln(x).$$

iv) Justifions, pour différents cas d'entiers relatifs n, l'égalité

$$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

En appliquant i) et iii), on obtient

a) cas $n = 2$: $\ln(x^2) = \ln(xx) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$.

b) cas $n = 3$: $\ln(x^3) = \ln(x^2x) = \ln(x^2) + \ln(x) = 2\ln(x) + \ln(x) = 3\ln(x)$.

c) cas $n = -2$: $\ln(x^{-2}) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln\left(x^2\right) = -2\ln(x)$.

d) cas $n = -3$: $\ln(x^{-3}) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\ln\left(x^3\right) = -3\ln(x)$.

v) Montrons

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

Sachant que $\sqrt{x}^2 = x$, on a

$$\ln\left(\sqrt{x}^2\right) = \ln(x)$$

ce qui, compte tenu de iv), conduit à

$$2\ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln(x)$$

puis

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

Exemples

a) $\ln(14) = \ln(2 \times 7) = \ln(2) + \ln(7)$

b) $\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(5) - \ln(2)$

c) $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

d) $\ln\left(2^5\right) = 5\ln(2)$

e) $\ln\left(2^{-5}\right) = -5\ln(2)$

f) $\ln\left(\sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}\ln(7)$